第 6 回：弾力性の推定と OLS 推定量の性質

【教科書第 5 章第 3 節，第 5 節】

北村　友宏

2025 年 11 月 4 日

本日の内容

1. 弾力性の推定
2. OLS 推定量の性質（単回帰の場合）

弾力性の推定

説明変数と被説明変数の自然対数をとった単回帰モデル

$$\begin{aligned} \ln y_i &= \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \\ E(u_i \mid \ln x_i) &= 0, \\ E(u_i u_j \mid \ln x_i) &= 0 \quad (i \neq j), \\ V(u_i \mid \ln x_i) &= \sigma^2, \\ i &= 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

を推定することを考える．

- $\ln y_i$ や $\ln x_i$ はそれぞれ，ln まで含めて 1 つの変数と考えれば，線形回帰モデルと同様の手法で推定できる．

- 回帰係数 β_1 は，$\ln y_i$ を $\ln x_i$ で微分したものと考えることもできる．つまり，

$$\beta_1 = \frac{d \ln y_i}{d \ln x_i}.$$

  - 「$\ln x_i$ で微分」と書くと「関数で微分」という書き方になり，数学的に良くないが，ここでは視覚的に分かりやすくするため，$\ln x_i$ を 1 つの変数と考えてこの表記をする．

$$\frac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.$$

（証明）

$$\begin{aligned}\frac{d \ln y_i}{d \ln x_i} &= \frac{d \ln y_i}{dy_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{d \ln x_i} \\ &= \frac{d \ln y_i}{dy_i} \cdot \frac{dy_i}{dx_i} \cdot \frac{1}{\frac{d \ln x_i}{dx_i}}.\end{aligned}$$

ここで，自然対数の微分の公式から，

$$\frac{d \ln y_i}{dy_i} = \frac{1}{y_i}, \quad \frac{d \ln x_i}{dx_i} = \frac{1}{x_i}$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{d\ln x_i}{dx_i}} &= \frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x_i}}\\
&= \frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{\frac{dx_i}{x_i}}\\
&= \frac{dy_i}{y_i}\cdot\frac{1}{\frac{dx_i}{x_i}}\\
&= \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.
\end{aligned}
$$

したがって，$\dfrac{d\ln y_i}{d\ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ である．（証明終）

以上より，$\beta_1 = \dfrac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$.

- dx_i: x_i が微小に増加したときの x_i の増加量
- dy_i: y_i が微小に増加したときの y_i の増加量
- $\dfrac{dx_i}{x_i}$:（x_i が微小に増加したときの）x_i の増加率
- $\dfrac{dy_i}{y_i}$:（y_i が微小に増加したときの）y_i の増加率

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{(y_i\text{の増加率})}{(x_i\text{の増加率})}.$$

$\Rightarrow \beta_1$, つまり $\frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ は，x_i が 1%増加したときに y_i が何%増加するかを表す.

- x_i が 1%増加したときに y_i が何%増加するかを表すものを「y_i の x_i に対する弾力性（elasticity）」または「y_i の x_i 弾力性」という.
  - e.g., 需要の価格に対する弾力性，需要の価格弾力性
  - 弾力性が β_1 であれば，x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する.

以上より,

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

における $\ln x_i$ の回帰係数 β_1 は,「y_i の x_i に対する弾力性」.

➥ β_1 を推定すれば y_i の x_i に対する弾力性を推定できる.

- e.g., β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1$ が,y_i の x_i に対する弾力性の推定値.

回帰係数の解釈

説明変数や被説明変数がレベルなのか対数値なのかによって，説明変数の回帰係数の解釈が異なる．

- レベル＝レベル・モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は β_1 単位増加する．

- ログ＝ログ・モデル

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する．
    （「$100 \times \beta_1$%」にしない！）

- ログ＝レベル・モデル

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は $100 \times \beta_1$%増加する．
  - x_i が 1 単位増加したときに y_i が 100 × 何%増加するかを表すものを「y_i の x_i に対する半弾力性（semi-elasticity）」という．
    ➡ β_1 は y_i の x_i に対する半弾力性．

- レベル＝ログ・モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は $\dfrac{1}{100} \times \beta_1$ 単位増加する．
  - あまり使われない．

対数変換したモデルを推定する目的

- 弾力性や半弾力性を推定するため

だけでなく，

- モデルの当てはまりを改善するため

に，ログ＝ログ・モデルやログ＝レベル・モデルを推定する場合もある．

$$\Uparrow$$

変数を対数変換して Log-Log Model などを推定したほうが，Level-Level Model よりも R^2 が高くなる場合がある．

gretl での変数の対数変換の方法

1. gretl の画面上で，自然対数をとりたい変数を選択し，その上で右クリック→「対数を取る」と操作．
   - 対数変換された変数の名前の頭には l_ が付けられる．
2. 「gretl」ウィンドウのメニューバーから「ファイル」→「データを保存」と操作し，必ずデータセットを上書き保存．

変数の観測値に 0 が含まれている場合

- 0 は対数変換できない.
  ➡ 観測値に 0 が含まれる変数を対数変換すると，0 の観測値が欠損になる.

ミンサー方程式（ログ＝レベル・モデル）の推定

年収のみ対数変換したミンサー方程式

$$\ln income_i = \beta_0 + \beta_1 yeduc_i + u_i$$

- $income_i$：年収（万円）
- $yeduc_i$：修学年数（年）
- i：個人番号

を推定する.

ログ＝レベル・モデル推定結果

gretl: モデル2

ファイル 編集(E) 検定(T) 保存(S) グラフ(G) 分析(A) LaTeX

```
モデル 2: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-4327
従属変数: lincome

             係数         標準誤差      t値          p値
  -----------------------------------------------------------
  const      4.38520      0.100312      43.72      0.0000     ***
  yeduc      0.0651801    0.00717354     9.086     1.53e-019  ***

Mean dependent var   5.288386   S.D. dependent var   0.895150
Sum squared resid    3401.469   回帰の標準誤差              0.886830
R-squared            0.018731   Adjusted R-squared   0.018504
F(1, 4325)           82.55863   P-value(F)           1.53e-19
Log-likelihood      -5619.064   Akaike criterion     11242.13
Schwarz criterion    11254.87   Hannan-Quinn         11246.63
```

- 修学年数の係数
  - 0.0651801（符号は正）
    ➡ 半弾力性は 0.0651801.
    ➡ 修学年数が 1 年長くなると，年収は平均して 6.51801%高くなる傾向がある.
- 定数項
  - 4.3852（符号は正）
- 誤差項の標準誤差
  - 0.88683
- 決定係数
  - $R^2 = 0.018731.$
    ➡ 「年収の対数値」の動きの約 1.9%を「修学年数」の動きで説明できている.

ミンサー方程式（レベル＝ログ・モデル）の推定

修学年数のみ対数変換したミンサー方程式

$$income_i = \beta_0 + \beta_1 \ln yeduc_i + u_i$$

- $income_i$: 年収（万円）
- $yeduc_i$: 修学年数（年）
- i : 個人番号

を推定する．

レベル＝ログ・モデル推定結果

gretl: モデル3

ファイル　編集(E)　検定(T)　保存(S)　グラフ(G)　分析(A)　LaTeX

```
モデル 3: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-4327
従属変数: income

                係数       標準誤差      t値          p値
  --------------------------------------------------------------
  const       -515.480    50.0329     -10.30    1.31e-024 ***
  lyeduc       297.534    19.0743      15.60    2.07e-053 ***

Mean dependent var   263.9040   S.D. dependent var   176.5552
Sum squared resid    1.28e+08   回帰の標準誤差          171.8089
R-squared            0.053262   Adjusted R-squared   0.053043
F(1, 4325)           243.3189   P-value(F)           2.07e-53
Log-likelihood      -28407.14   Akaike criterion     56818.29
Schwarz criterion    56831.03   Hannan-Quinn         56822.79
```

- 修学年数の対数値の係数
  - 297.534（符号は正）
    ➥ 修学年数が 1%長くなると，年収は平均して 2.97534 万円（29,753.4 円）高くなる傾向がある.
- 定数項
  - −515.48（符号は負）
- 誤差項の標準誤差
  - 171.8089
- 決定係数
  - $R^2 = 0.053262.$
    ➥ 「年収」の動きの約 5.3%を「修学年数の対数値」の動きで説明できている.

ミンサー方程式（ログ＝ログ・モデル）の推定

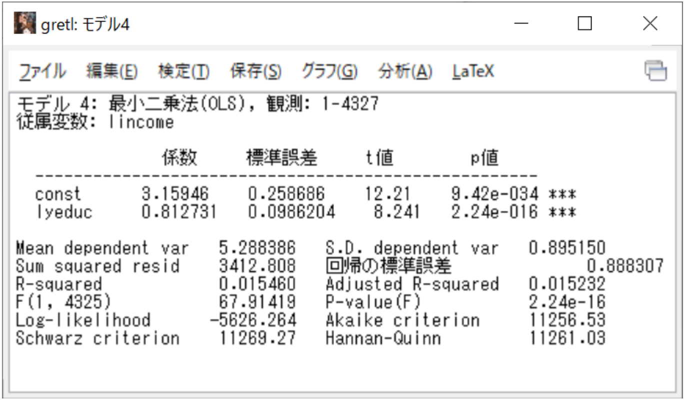
年収と修学年数両方を対数変換したミンサー方程式

$$\ln income_i = \beta_0 + \beta_1 \ln yeduc_i + u_i$$

- $income_i$: 年収（万円）
- $yeduc_i$: 修学年数（年）
- i : 個人番号

を推定する.

ログ＝ログ・モデル推定結果



モデル 4: 最小二乗法(OLS), 観測: 1-4327
従属変数: lincome

	係数	標準誤差	t値	p値	
const	3.15946	0.258686	12.21	9.42e-034	***
lyeduc	0.812731	0.0986204	8.241	2.24e-016	***

Mean dependent var	5.288386	S.D. dependent var	0.895150
Sum squared resid	3412.808	回帰の標準誤差	0.888307
R-squared	0.015460	Adjusted R-squared	0.015232
F(1, 4325)	67.91419	P-value(F)	2.24e-16
Log-likelihood	-5626.264	Akaike criterion	11256.53
Schwarz criterion	11269.27	Hannan-Quinn	11261.03

- 修学年数の対数値の係数
  - 0.812731（符号は正）
    ➥ 修学年数が 1%長くなると，年収は平均して 0.812731%高くなる傾向がある．
- 定数項
  - 3.15946（符号は正）
- 誤差項の標準誤差
  - 0.888307
- 決定係数
  - $R^2 = 0.01546.$
    ➥ 「年収の対数値」の動きの約 1.5%を「修学年数の対数値」の動きで説明できている．

OLS 推定量の性質

- 単回帰モデル $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ において，説明変数 x_i と誤差項 u_i が平均独立であり，誤差項 u_i の期待値が 0 であること，つまり，

$$E(u_i \mid x_i) = E(u_i) = 0,$$

が満たされていれば，単回帰モデルの回帰係数の OLS 推定量 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ の期待値は，

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0,$$
$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1.$$

➡ 単回帰モデルの回帰係数の OLS 推定量は不偏性をもつ不偏推定量である．（証明は省略）

因果関係のための条件

- 単回帰モデル $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ において，

$$E(u_i \mid x_i) = E(u_i) = 0.$$

$$\Downarrow$$

これが満たされていなければ，単回帰モデルの回帰係数 β_1 は「x_i から y_i への因果関係」を表さない.

- y_i がテストの点数，x_i が朝食摂取の有無（摂取する＝1, 摂取しない＝0）とすると，家庭環境などの外的条件を含む，テストの点数に影響を与えるさまざまな要因は誤差項 u_i に入る．
  ⇒ 一般に，朝食を食べている小中学生（$x_i = 1$）は家庭環境が良いと考えられるので，

$$E(u_i \mid x_i = 1) > E(u_i \mid x_i = 0).$$

  ⇒ 説明変数と誤差項が相関し，平均独立にならない．つまり，

$$E(u_i \mid x_i) \neq E(u_i).$$

  ⇒ この場合，β_1 を推定しても，それを「朝食を食べるとテストの点数が良くなる（悪くなる）」という因果関係として解釈できない．

今日のキーワード

弾力性，半弾力性

次回までの準備

- 今回の講義スライドを読み直す.
- 「提出課題 3」に取り組む.
- 教科書第 6 章第 1 節〜第 3 節を読む.